Nombres réels, suites réelles

Exercice 1 (*Bornes sup et inf, pratique*)**.** Lorsqu'elles existent, déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

$$A=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}^*\right\} \qquad B=\left\{\frac{1}{n}+(1+(-1)^n)\,n^2\;\middle|\; n\in\mathbb{N}^*\right\} \qquad C=\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$$

Exercice 2 (*Bornes sup et inf, théorique*)**.** Soit $A,B\subset\mathbb{R}$ deux parties non vides.

1) On suppose A,B majorées et on définit
$$A+B:=\{a+b\mid a\in A,\, b\in B\}$$
Montrer que $A+B$ est majoré et que $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

2) On suppose A bornée et on définit
$$|A|:=\{|a|\mid a\in A\}$$
Montrer que $|A|$ est majoré et déterminer $\sup|A|$.

Exercice 3 (*Nombres rationnels*)**.** Rappel : si $x,y\in\mathbb{Q}$, alors $x+y,x-y,xy\in\mathbb{Q}$ et si $y\neq 0$, $\dfrac{x}{y}\in\mathbb{Q}$.

1) Montrer que les nombres $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ainsi que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ sont irrationnels.
2) Soient $x,y\in\mathbb{Q}$ tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

Exercice 4 (*Partie entière*)**.** Rappel : étant donné $x\in\mathbb{R}$, on a $\quad p=\lfloor x\rfloor \iff (p\in\mathbb{Z}$ et $p\leq x<p+1)$.

1) Montrer que $\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad\forall n\in\mathbb{Z}\quad \lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$
2) Étant donnés deux réels x,y, est-ce que $\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$?
3) En utilisant le fait que $x=\lfloor x\rfloor+(x-\lfloor x\rfloor)$, exprimer $\lfloor 2x\rfloor$ en fonction de $\lfloor x\rfloor$.

Exercice 5 (*Vrai ou faux, convergence*)**.** Vrai ou faux ? Justifier.

1) Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
2) Toute suite croissante admet une limite.
3) La relation $(x_n)\mathcal{R}(y_n)\iff \lim(x_n-y_n)=0$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4) Si $|u_n|\to\ell$, alors $u_n\to\ell$ ou $u_n\to-\ell$.
5) La somme de deux suites divergentes est divergente.
6) La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

Exercice 6 (*Sens de variation*)**.** Étudier la monotonie (en précisant si elle est stricte) des suites de termes généraux suivants :

$$a_n=\cos(n\pi) \qquad b_n=\frac{2+(-1)^n}{3^n} \qquad c_n=\frac{n^n}{n!}$$

Exercice 7 (*Limite de suites*)**.** Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite des suites de termes généraux suivants :

1) $u_n = \dfrac{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$

2) $u_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$

3) $u_n = \dfrac{n^2+5n}{-5n^3+\cos n}$

4) $u_n = \arctan(e^n)$

5) $u_n = \sqrt[n]{3+\sin n}$

6) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

7) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

8) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 8 (*Série harmonique*)**.** Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$, puis conclure sur la nature de la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_n$.

Exercice 9 (***Moyenne de Césaro***)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On définit la suite (v_n) par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1) On suppose que $u_n \to 0$. Montrer que $v_n \to 0$. *Indication : pour tous entiers naturels* $n \geq N$

$$|v_n| \leq \left|\frac{u_1+\cdots+u_{N-1}}{n}\right| + \left|\frac{u_N+\cdots+u_n}{n}\right|$$

2) En déduire que si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $v_n \to \ell \in \mathbb{R}$.
3) La réciproque est-elle vraie ?
4) Montrer que si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.

Exercice 10 (*Suites définies implicitement*)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation (E_n) d'inconnue $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$x + \tan x = n$$

1) Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n.
2) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 11 (*Suites extraites*)**.** Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 12 (*Suites extraites, bis*)**.** Montrer que la suite de terme général $u_n = \cos\left(\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\pi\right)$ est divergente.

Exercice 13 (*Suites adjacentes*)**.** Montrer que les suites de termes généraux suivants convergent :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Exercice 14 (*Suites adjacentes, bis*)**.** On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.

Exercice 15 (*Suites et parties entières*)**.** Déterminer la limite éventuelle des suites de termes généraux

$$u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}} \qquad\qquad v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

Pour v_n, on pourra considérer la suite définie par $w_n = v_n + \dfrac{1}{10^n}$.

Exercice 16 ($\star$)**.** Montrer qu'une suite (u_n) est non majorée si et seulement s'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.

Exercice 17 ($\star$)**.** Montrer que $1 = 0,999999...$ *Indication : utiliser le théorème d'unicité de la limite.*

Exercice 18 ($\star$)**.** Étudier la nature de la suite (u_n) où u_n est la n–ième décimale de $\sqrt{2}$.

Exercice 19. Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \left\lfloor 3 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor$.

Exercice 20. Montrer que l'ensemble $A = \{\sqrt[3]{q} \mid q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 21. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 22 (Suite complexe)**.** Soit (z_n) une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\overline{z}_n)$. Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Exercice 23. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 24 (Suite arithmético-géométrique)**.** Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1$

Exercice 25 (Suites récurrentes doubles)**.** Déterminer le terme général des suites (u_n) définies par

1) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
2) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
3) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
4) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = e^{i\frac{\pi}{4}}u_{n+1} + 2iu_n$

Exercice 26. Déterminer la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On pourra poser $v_n = u_n - 2$.

Exercice 27 (Suites récurrentes, cas général)**.** Étudier les suites (u_n) définies par

1) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$
2) $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2$ (on discutera selon la valeur de u_0).
3) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \arctan(u_n)$
4) $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 1$

Exercice 28 ($\star$)**.** On cherche toutes les suites réelles (u_n) vérifiant $(E) : u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 3^{n^2}$.

1) Soit (u_n) une solution. On note $C = u_0 \in \mathbb{R}$ le premier terme de la suite. Exprimer u_1, u_2, u_3 en fonction de C.
2) En déduire toutes les suites solutions de l'équation homogène $(E_H) : u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 0$ et les exprimer en fonction de $C = u_0$.

3) Déterminer une solution particulière de (E). On appliquera la méthode de la variation de la constante : on remplace C par C_n dans la solution de (E_H), puis on injecte cette expression dans (E), et enfin on trouve une suite (C_n) qui convient.
4) En déduire les solutions de (E).